

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA
FONSECA**

**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
ENGENHARIA MECÂNICA**

MATEUS OLIVEIRA DE PAULA FREITAS

**Estudo Numérico de um Sistema Não Suave Incluindo Não
Linearidade do tipo Duffing para Geração de Energia Elétrica
utilizando Material Piezoelétrico**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

RIO DE JANEIRO

2019

MATEUS OLIVEIRA DE PAULA FREITAS

**Estudo Numérico de um Sistema Não Suave Incluindo Não
Linearidade do tipo Duffing para Geração de Energia Elétrica
utilizando Material Piezoelétrico**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como requisito parcial à
obtenção do título de Bacharel em
Engenharia Mecânica, do Departamento
de Engenharia Mecânica, do Centro
Federal de Educação Tecnológica Celso
Suckow da Fonseca.

Orientadora: Luciana Loureiro da Silva
Monteiro

Rio de Janeiro

2019

CEFET/RJ – Sistema de Bibliotecas / Biblioteca Central

- P866 Freitas, Mateus Oliveira de Paula
Estudo numérico de um sistema não suave incluindo não linearidade do tipo Duffing para geração de energia elétrica utilizando Material Piezoelétrico / Mateus Oliveira de Paula Freitas. — Rio de Janeiro, 2019.
45f. : il. (algumas. color) ; enc.
- Projeto Final (Graduação) Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2019.
Bibliografia : f. 43-45
Orientadora: Luciana Loureiro da Silva Monteiro
1. Engenharia mecânica. 2. Geração de energia. 3. Equações diferenciais. 4. Análise experimental. I. Monteiro, Luciana Loureiro da Silva (Orient.). III. Título.

CDD 620.1

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora Luciana Loureiro, mesmo com todas as minhas dificuldades, sempre esteve disponível para ajudar na conclusão desse projeto.

Sou muito grato aos meus chefes Leandro Lima e Maurício Suarez por todo apoio e encorajamento durante a elaboração deste trabalho.

À minha amada, Marcela Álvaro por me prover auxílio durante essa etapa tão importante para minha carreira.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização deste documento.

RESUMO

FREITAS, Mateus Oliveira de Paula. **Estudo Numérico de um Sistema Não Suave Incluindo Não Linearidade do tipo Duffing para Geração de Energia Elétrica utilizando Material Piezoelétrico.** 2019. 46 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca. Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.

Este projeto visa o estudo de modelos de colheita de energia de vibração utilizando materiais piezoelétricos para geração de energia limpa e renovável com as mais diversas aplicações em engenharia. Sistemas de geração de energia com dinâmica linear possuem uma desvantagem quando operam fora da frequência de ressonância e apresentam baixa eficiência, portanto, o estudo do aumento de eficiência vem sendo tema de diversos trabalhos na literatura por meio da introdução de não linearidades no sistema. O presente trabalho tem como objetivo a investigação aprofundada do comportamento de um sistema de colheita não suave. É explorado um modelo com um grau de liberdade para descrever uma viga recoberta de um material piezoelétrico sujeita a vibrações, acoplada a um circuito elétrico e com a presença de um batente mecânico (suporte descontínuo) e com não linearidade do tipo Duffing. Essas não linearidades, juntas, modificam significativamente a dinâmica do sistema resultando em uma ampliação na faixa de frequência disponível do dispositivo e introduzir efeitos como saltos dinâmicos. Simulações numéricas foram realizadas para avaliar a dinâmica e desempenho do dispositivo de geração de energia das duas não linearidades. Análises comparativas dos sistemas mostram que há um aumento de eficiência para sistemas piezomagnetoelástico na presença de um suporte descontínuo quando comparado a sistemas com apenas uma não linearidade.

Palavras-chaves: Sistema de colheita de energia. Piezeletricidade. Dinâmica não linear. Sistemas não suaves. Impacto. Duffing.

ABSTRACT

FREITAS, Mateus Oliveira de Paula. **Numerical Study of a Non-Smooth Linearity Duffing System for Electric Power Generation Using Piezoelectric Material.** 2019. 46 pages. Trabalho de Conclusão de Curso - Federal Center of Technological Education. Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2019.

This project aims to study piezoelectric vibration-based energy harvesting systems for the generation of clean and renewable energy with the greatest variety of applications in engineering. Linear power generation systems have a disadvantage when unmatching the resonance frequency result in low efficiency, thus, the study of efficiency increase has been the topic of several works in the literature by introducing non-linearities into the system. This work has the goal of investigating the behavior of a non - soft harvesting system. A single degree of freedom model it is used to describe a beam coated with a piezoelectric material that vibrates coupled to an electric circuit and with the presence of a mechanical stopper (discontinuous support) and with Duffing nonlinearity. These nonlinearities together significantly modify system dynamics resulting in a widening of the available frequency range of the device and introducing effects such as dynamic jumps. Numerical simulations were performed to evaluate the dynamics and performance of the power generation device of the two nonlinearities. Comparative analysis of the systems shows that there is an increase in efficiency for piezomagnetoelastic systems in the presence of discontinuous support when compared to systems with a single nonlinearity.

Key-words: Energy Harvesting. Piezoelectricity. Nonlinear Dynamics. Nonsmoothed Systems. Impact. Duffing.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema de Referência.....	15
Figura 2 - Modos de operação em um material piezoelétrico.....	16
Figura 3 - Modelo arquétipo de um sistema de geração de energia com um grau de liberdade utilizando um elemento piezoelétrico sujeito a uma base vibratória	17
Figura 4 - Energia Potencial $U(x)$ para diferentes valores de α e β	19
Figura 5 - Sistema de forçamento do tipo Duffing utilizando ímãs permanentes.....	20
Figura 6 - Geometria do sistema não linear formado por uma viga piezoelétrica engastada e dois ímãs permanentes.....	20
Figura 7 - Modelo arquétipo do sistema de captação de energia baseado em vibrações.....	22
Figura 8 - Força e energia Potencial para diferentes valores de α e β	25
Figura 9 - Comparação entre um sistema de geração linear ($\beta = 3,0 ; \alpha = 0$), não linear do tipo Duffing sendo um monoestável ($\beta = 0,6 ; \alpha = 0,3$) e biestável ($\beta = -1,0 ; \alpha = 0,5$) em função da frequência do sistema: (a) Potência de entrada; (b) Potência de saída; (c) Deslocamento máximo; (d) Eficiência do sistema	29
Figura 10 - Deslocamento máximo versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez do suportes e o <i>gap</i> (a) $g = 1,0$; (b) $g = 1.5$; (c) $g = 2,0$	30
Figura 11 - Potência de entrada versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez do suportes e o <i>gap</i> (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1.5$; (c) $\bar{g} = 2,0$	31
Figura 12 - Potência de saída versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez do suportes e o <i>gap</i> (a) $g = 1,0$; (b) $g = 1.5$; (c) $g = 2,0$	32
Figura 13 - Eficiência versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez do suportes e o <i>gap</i> (a) $g = 1,0$; (b) $g = 1.5$; (c) $g = 2,0$	33
Figura 14 - Eficiência do sistema em função da frequência de forçamento com $\mu = 50$, variando o <i>gap</i>	34
Figura 15 - Média da potência de saída para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de <i>gap</i> , em função da rigidez do batente (μ)	35
Figura 16 - Eficiência média para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de <i>gap</i> , em função da rigidez do batente (μ).....	35
Figura 17 - Deslocamento máximo versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável	

com impactos), variando a rigidez do suportes e o gap (a) $g = 1,0$; (b) $g = 1.5$; (c) $g = 2,0$ 37

Figura 18 - Potência de entrada versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável com impactos), variando a rigidez do suportes e o *gap* (a) $g = 1,0$; (b) $g = 1.5$; (c) $g = 2,0$ 38

Figura 19 - Potência de Saída versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável com impactos), variando a rigidez do suportes e o *gap* (a) $g = 1,0$; (b) $g = 1,5$; (c) $g = 2,0$ 39

Figura 20 - Eficiência versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável com impactos), variando a rigidez do suportes e o *gap* (a) $g = 1,0$; (b) $g = 1,5$; (c) $g = 2,0$ 40

Figura 21 - Média da potência de saída para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de gap, em função da rigidez do batente (μ)40

Figura 22 - Eficiência média para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de gap, em função da rigidez do batente (μ).....41

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros do sistema	26
Tabela 2 - Não linearidades presentes em cada caso de sistema de colheita de energia	26
Tabela 3 - Sequência de comparações dos modelos de colheita de energia.....	27
Tabela 4 - 1ª Comparação entre os sistemas de colheita de energia	29
Tabela 5 - 2ª Comparação entre os sistemas de colheita de energia	36
Tabela 6 - 3ª Comparação entre os sistemas de colheita de energia	41

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	MOTIVAÇÃO	10
1.2	ESTADO DA ARTE.....	11
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	14
2.1	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS.....	14
2.2	MODOS DE OPERAÇÃO	16
2.3	MODELO 1-D ELETROMECAÂNICO	17
2.4	SISTEMA DE IMÃS REPRESENTADO POR FORÇA DO TIPO DUFFING.....	19
3	MODELO NUMÉRICO.....	22
3.1	MODELO.....	22
3.2	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO ADIMENSIONAIS.....	23
3.3	ESCOLHA DOS PARÂMETROS DE DUFFING.....	24
4	MÉTODO NUMÉRICO E TIPOS DE ANÁLISES.....	26
5	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	28
6	CONCLUSÕES	42
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	43

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Ao redor do mundo, o uso de dispositivos eletrônicos portáteis é muito comum no contexto atual. No geral, o fornecimento de energia para esses dispositivos é feito por meio de baterias de lithium-ion. Apesar dessas baterias possuírem autonomia de muitas horas de uso antes de uma recarga, eventualmente é necessário realizar o carregamento da bateria. Em vista de buscar soluções para eliminar essa dependência para dispositivos de baixo consumo, a aquisição de energia de vibração e transformação em energia elétrica tem sido foco de diversos pesquisadores ao longo dos últimos anos tais como: duToit, Wardle e Kim (2005), Erturk e Inman (2011), Jia e Seshia (2016) e Monroe e Lang (2019). Materiais piezoelétricos são muito utilizados para essa aplicação pois possuem um acoplamento eletromecânico, ou seja, ao sofrer uma deformação, o material gera uma diferença de potencial elétrico. O efeito também ocorre de forma inversa. Outro aspecto relevante desses sistemas de geração é quanto a operação em regime linear ou não-linear. Sistemas lineares têm eficiência significativa apenas na faixa de ressonância. Fora dessa faixa, o sistema é pouco eficiente. Por meio da introdução de não linearidades em um dado sistema, é possível obter eficiência considerável em uma banda de frequência maior. Um exemplo de aplicação em sensores sem fio que podem ser instalados em áreas de difícil acesso. Esses seriam capazes de adquirir e transmitir dados por exemplo, e não depender fontes externas. Sabendo que o ambiente externo, de maneira geral, apresenta frequências aleatórias, os sistemas não lineares são mais versáteis para a transformação de energia manter sistema funcionando. Dessa maneira, o presente trabalho tem o objetivo de investigar a dinâmica não linear de alguns modelos e realizar um estudo comparativo quanto a capacidade de colheita energética. Para este fim, explora-se um modelo com um grau de liberdade para descrever uma viga recoberta de um material piezoelétrico sujeita a vibrações, acoplada a um circuito elétrico e com a presença de um batente mecânico (suporte descontínuo). Os impactos modificam a dinâmica do sistema e ampliam a faixa de frequências de operação. Posteriormente, inclui-se uma não linearidade do tipo Duffing no elemento piezoelétrico e a combinação destas não linearidades mostram que o sistema se torna ainda mais complexo e eficiente.

1.2 ESTADO DA ARTE

Aquisição de energia de vibração é um assunto muito pesquisado atualmente em função da possibilidade de eliminar a recarga de baterias e cabos de energia em dispositivos de baixa potência. Diversos autores realizaram estudos sobre a conversão linear eletromecânica tais como duToit, Wardle e Kim (2006) e Kim et al. (2010). Nessa linha de estudo, o modelo arquétipo de colheita de energia considera uma viga engastada, com uma massa em sua extremidade e uma base que produz a vibração do sistema para a viga. Nessa configuração, o sistema é do tipo linear, que está limitado a uma pequena banda de aquisição de energia significativa. Em função do ambiente apresentar frequências de excitações randômicas, as não-linearidades no sistema de colheita de energia são inseridas com o objetivo de produzir energia de forma significativa ao longo de uma faixa de frequência maior quando comparado com um sistema linear.

Na tentativa de criar um dispositivo mais eficiente, Ramlan et al. (2010) propôs um arranjo de massa, mola amortecedor para o mecanismo do tipo *snap through*. Esse sistema consiste em duas molas lineares oblíquas conectados a uma massa e amortecedor, e o propósito desse mecanismo é aumentar o gradiente de deslocamento em função do tempo, resultando em maior velocidade do deslocamento da massa em uma dada excitação do sistema. As análises numéricas desse modelo mostram que mais energia é coletada pelo mecanismo se a frequência de excitação é muito menor do que a frequência natural.

Análises numéricas e experimentais usando osciladores do tipo Duffing monoestáveis e biestáveis tem sido estudo de diversos pesquisadores tais como Mann e Sims (2009) e Sebald et al. (2011). Por meio da adição de ímãs permanentes a uma viga, é possível mudar a rigidez efetiva e assim introduzir não linearidade no sistema de aquisição de energia. Sebald et al. (2011) apresentou um modelo eletromecânico não linear que inclui acoplamento piezoelétrico e uma rigidez não linear do tipo Duffing. Ao submeter o modelo a uma excitação harmônica, ao longo de uma faixa de frequência específica a largura da banda de potência é aumentada enquanto há uma redução na potência de saída. Comparado com o modelo linear, para a mesma largura de banda, é exibido o aumento considerável de potência de saída.

Paula, Inman e Savi (2015) estudaram a influência de não linearidades em sistemas de colheita de energia de uma estrutura piezomagnetoelástico sujeita a vibrações aleatórias. Uma análise numérica foi apresentada para comparar a tensão elétrica gerada em um sistema linear, não linear biestável e não linear mono estável. A geração de energia é aumentada quando o sistema biestável vibra próximo aos dois pontos de equilíbrio.

Ferrari et al. (2009) realizou um estudo comparativo sobre a influência das condições de excitações para um sistema de aquisição de energia. O sistema que consiste em uma estrutura magneto elástica de maneira a obter um gerador biestável. Foram impostas ao sistema as seguintes condições de excitação: Puramente harmônica, puramente randômica e uma combinação dessas condições. Como conclusão, excitações randômicas e efeitos não lineares podem ser ajustados no sistema de maneira a aumentar a capacidade de colheita de energia do dispositivo.

Betts et al. (2012) demonstrou um arranjo biestável sem uso de ímãs permanentes localizados simetricamente próximo do fim da viga piezolétrica. A alternativa encontrada foi o uso de arranjo assimétrico de camadas compósitas laminadas que levam a uma larga amplitude de oscilações quando sujeita a vibração mecânica. Essa configuração permite um design que ocupa menor espaço os resultados mostram melhora na aquisição de energia quando comparado com outros dispositivos comuns.

Friswell et al. (2012) apresentou uma nova configuração de dispositivo em relação à viga em balanço com uma massa. Essa proposta consiste numa viga na vertical sofrendo uma excitação na direção transversal a base. Esse dispositivo é altamente não linear, apresentando dois poços de potencial ao utilizar grandes massas. Com isso, o sistema pode exibir em sua dinâmica múltiplas soluções e saltos entre os poços de potencial. Dessa maneira, o autor foi capaz de demonstrar uma configuração com alto potencial de colheita de energia com uma larga banda a baixas frequências quando comparado com modelo linear.

Bouhedma et al. (2019) apresentou um modelo de sistema de colheita de energia capaz de se adaptar a frequência dominante de excitação do sistema, por meio de um sistema magnético. E dessa maneira aumentar a eficiência do sistema.

Divenyi et al (2006) e Savi et al. (2007) apresentaram modelos numéricos e experimentais com objetivo de estudar sistemas do tipo não suave. Jacquelin, Adhikari e Friswell (2011) estudaram o design de alguns parâmetros mecânicos que

influenciam na potência de saída de um sistema de energia, de maneira a otimizar a eficiência do sistema com impactos.

Rysak et al. (2014) investigaram um sistema de colheita de energia utilizando uma viga de alumínio acoplado a um material piezoelétrico submetido a excitação mecânica e impactos. Foi notado que o impacto gerou uma característica de aumento de rigidez do sistema. E que, por sua vez, gerou uma faixa de frequência mais ampla de aquisição de energia, aumentando a eficiência do processo de coleta de energia. Ai et al. (2019) apresentou uma análise acerca de sistemas de geração de energia com um batente mecânico que gera impactos. Foi demonstrado que essa não linearidade pode modificar a dinâmica do sistema e aumentar a banda de energia de aquisição do sistema.

Esse trabalho tem como objetivo investigar numericamente os efeitos das não linearidades causadas por aspectos do sistema mecânico e do piezoelétrico. O modelo arquétipo de vibração com um grau de liberdade é utilizado considerando que o sistema mecânico está acoplado ao circuito elétrico do material piezoelétrico. Em primeiro momento um oscilador do tipo Duffing que pode ser monoestável ou biestável, introduz a não linearidade do sistema. Em seguida, é utilizado um sistema com suporte descontínuo para gerar impactos e obter uma dinâmica não linear. Após essas análises, a combinação desses sistemas é realizada, e uma investigação comparativa entre os sistemas de aquisição de energia é realizada considerando potência de saída, potência entrada e eficiência.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, serão tratados os principais conceitos teóricos utilizados para desenvolvimento do presente trabalho. Inicialmente será introduzido o conceito do material piezoelétrico e suas propriedades como material inteligente, mostrando também as equações constitutivas do material. Na sequência será apresentado o conceito de piezomagnetoelasticidade e força do tipo Duffing.

2.1 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS

Materiais piezoelétricos são classificados como materiais inteligentes por possuir um acoplamento eletromecânico. Em linhas gerais, o que ocorre é: ao submeter o material a uma tensão mecânica é gerado uma tensão elétrica. Da mesma maneira, ocorre o efeito inverso. Devido a esse acoplamento, o material tem diferentes aplicações voltadas para engenharia, tais como sensores, atuadores e dispositivos de colheita de energia.

Segundo Moheimani e Fleming (2006), as equações constitutivas que descrevem a propriedade piezoelétrica são baseadas na premissa de que a deformação total no transdutor é a soma das deformações mecânicas induzidas pelos esforços mecânicos e pela atuação causada pela tensão elétrica aplicada. Essas equações eletromecânicas também foram descritas no livro de Erturk e Inman (2011).

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{ik} E_k \quad (1)$$

$$D_m = d_{mj} T_j + \varepsilon_{mk}^T E_n \quad (2)$$

Sendo, T a componente de tensão, S componente de deformação, s o inverso do módulo de Young, d o coeficiente piezoelétrico de deformação, E componente do campo elétrico, D deslocamento elétrico e ε a permissividade dielétrica. Os sobrescritos E e T representam que uma dada constante está sendo avaliada considerando um campo elétrico constante e uma tensão constante, respectivamente.

Os índices das equações indicam a direção do sistema de coordenadas do material conforme figura 1, onde P representa o vetor de polarização do material. Os índices assumem os valores: $i, j = (1 \rightarrow 6)$ e $k, m, n = (1 \rightarrow 3)$.

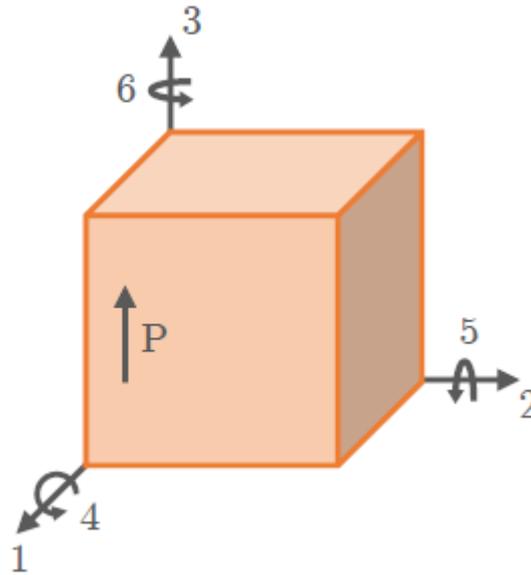


Figura 1 - Sistema de Referência
Fonte: Costa (2019)

Na forma matricial, as equações eletromecânicas para um material piezoelétrico linear podem ser descritas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & s_{14}^E & s_{15}^E & s_{16}^E & d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & s_{24}^E & s_{25}^E & s_{26}^E & d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & s_{34}^E & s_{35}^E & s_{36}^E & d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ s_{41}^E & s_{42}^E & s_{43}^E & s_{44}^E & s_{45}^E & s_{46}^E & d_{41} & d_{42} & d_{43} \\ s_{51}^E & s_{52}^E & s_{53}^E & s_{54}^E & s_{55}^E & s_{56}^E & d_{51} & d_{52} & d_{53} \\ s_{61}^E & s_{62}^E & s_{63}^E & s_{64}^E & s_{65}^E & s_{66}^E & d_{61} & d_{62} & d_{63} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{13}^T \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & \varepsilon_{21}^T & \varepsilon_{22}^T & \varepsilon_{23}^T \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & \varepsilon_{31}^T & \varepsilon_{32}^T & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Segundo Moheimani e Fleming (2006), pelo fato do piezoelétrico possuir a característica isotropia transversal, é possível assumir que o dispositivo é polarizado ao longo do eixo 3. Logo, podemos assumir que algumas relações:

$$s_{ij} = s_{ji} = 0 \text{ em } i = (1 \rightarrow 3), j = (4 \rightarrow 6);$$

$$s_{45}^E = s_{46}^E = s_{54}^E = s_{56}^E = s_{64}^E = s_{65}^E = 0 \text{ e } s_{11}^E = s_{22}^E, s_{13}^E = s_{31}^E = s_{23}^E = s_{32}^E;$$

$d_{ij} = d_{ji} = 0$ em $i = (1 \rightarrow 3)$, $j = (7 \rightarrow 8)$ e $i = (7 \rightarrow 9)$, $j = 6$;

$d_{41} = d_{14} = d_{43} = d_{34} = d_{52} = d_{25} = d_{53} = d_{35} = 0$;

$d_{31} = d_{32}$ e $d_{15} = d_{24}$;

$\varepsilon_{12}^T = \varepsilon_{13}^T = \varepsilon_{21}^T = \varepsilon_{23}^T = \varepsilon_{31}^T = \varepsilon_{32}^T = 0$ e $\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T$.

Assim, temos um modelo constitutivo com uma matriz simplificada:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.2 MODOS DE OPERAÇÃO

Os modos de operação indicam a direção de polarização do material piezoelétrico e a direção da resposta mecânica. Os dois modos mais comuns são: o modo 31 e 33 mostrados na figura 2.

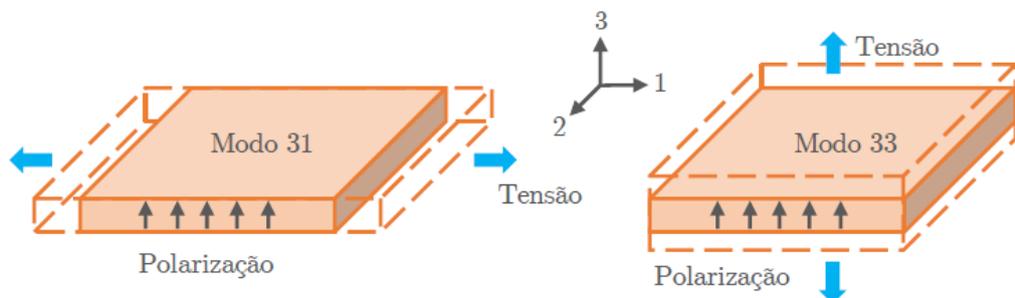


Figura 2 - Modos de operação em um material piezoelétrico

Fonte: Costa (2019)

2.3 MODELO 1-D ELETROMECAÂNICO

O modelo de 1 grau de liberdade do sistema de colheita de energia, foi descrito por duToit (2005). A partir das relações constitutivas do material piezoelétrico operando no modo 33, foi possível realizar uma simplificação para a Equação (4) mostrada na seção 2.1:

$$T_3 = c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \quad (5)$$

$$D_3 = e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \quad (6)$$

O D , E , S e T são definidos como deslocamento elétrico, campo elétrico, deformação aplicada e tensão mecânica na direção 3, respectivamente. Além dessas variáveis, temos a permissividade elétrica, ε do elemento piezoelétrico, e é a constante piezoelétrica que relaciona densidade de carga e deformação e c representa a matriz rigidez. Os sobrescritos E e S indicam que um parâmetro é medido a um campo elétrico ou tensão constante respectivamente.

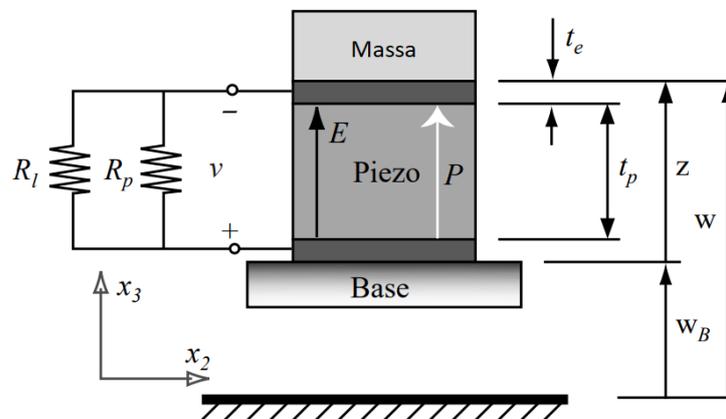


Figura 3 - Modelo arquetipo de um sistema de geração de energia com um grau de liberdade utilizando um elemento piezoelétrico sujeito a uma base vibratória

Fonte: duToit (2005)

Por meio de uma análise de equilíbrio de forças, as equações diferenciais de governo podem ser encontradas em termos das equações constitutivas e dos parâmetros do sistema definidos na figura 3, temos que a deformação é relacionada com os parâmetros do sistema por $S_3 = \frac{z}{t_p}$ e $E_3 = -\frac{v}{t_p}$. z é o deslocamento relativo à base, t_p a espessura do elemento piezoelétrico e v a tensão elétrica. A massa total

de um sistema é descrita por $M_T = M + \frac{1}{3}M_p$, e onde M_p é a massa do elemento piezoelétrico e M é a massa de prova. E a massa por área de seção transversal é descrita por $m_e = \frac{M_T}{A_p}$. Sendo A_p a área do elemento piezoelétrico. Sendo \ddot{w}_B a aceleração de base e \ddot{z} a aceleração relativa à base. Podemos definir que a tensão é a força por unidade de área, $T_3 = \frac{M_T(\ddot{z} + \ddot{w}_B)}{A_p} = -m(\ddot{z} + \ddot{w}_B)$. O sobrescrito com um ponto indica uma derivação em relação ao tempo de uma variável, ou seja, $d(\blacksquare)/d\tau = \dot{\blacksquare}$. O deslocamento elétrico, D_3 , é a carga nos eletrodos por unidade de área. Assim, com essas igualdades, temos as equações (7) e (8):

$$m_e \ddot{z} + c_{33}^E \frac{z}{t_p} + e_{33} \frac{v}{t_p} = -m \ddot{w}_B \quad (7)$$

$$D_3 = e_{33} \frac{z}{t_p} - \epsilon_{33}^S \frac{v}{t_p} = \frac{q}{A_p} \quad (8)$$

Multiplicando as duas equações por A_p , é definido o termo de acoplamento eletromecânico $\theta = -\frac{e_{33}A_p}{t_p}$. A rigidez efetiva é definida como $k = \frac{c_{33}^E A_p}{t_p}$, a capacitância sendo $C_p = \frac{\epsilon_{33}^S A_p}{t_p}$. A segunda equação pode ser escrita em função da corrente, $i = \frac{dq}{dt}$. E a corrente por sua vez, pode ser relacionada com a diferença de potencial $v = iR_l$. O termo que descreve a dissipação mecânica é $c = 2\zeta_m \omega_N M_T$, sendo ζ_m a razão de amortecimento mecânico e a frequência de ressonância, $\omega_N^2 = \frac{k}{M_T} = \frac{c_{33}^E}{m t_p}$.

Resultando em:

$$M_T \ddot{z} + c \dot{z} + kz - \theta v = -M_T \ddot{w}_B \quad (9)$$

$$\theta \dot{z} + C_p \dot{v} + \frac{1}{R_l} v = 0 \quad (10)$$

2.4 SISTEMA DE IMÃS REPRESENTADO POR FORÇA DO TIPO DUFFING

De acordo com Kovacic e Brennan (2011), a equação de Duffing em suas várias formas é usada para descrever muitos sistemas não-lineares. No caso de um sistema oscilatório a equação não-linear de segunda ordem é dada por (11). E por meio dessa equação, é possível descrever a dinâmica de um sistema.

$$x'' + \bar{c}x' + \bar{F}(x) - \phi\epsilon v = -U'' \quad (11)$$

Onde a força do oscilador é representada pela função $\bar{F}(x) = \beta x + \alpha x^3$. Integrando essa força é obtida a energia potencial $U(x) = \int \bar{F}(x) dx = \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4$. A figura 4 mostra a energia potencial para diferentes valores de α e β , é possível notar os diferentes comportamentos de cada sistema e assim caracterizá-los. As linhas paralelas ao eixo x tem função de identificar quantos pontos de equilíbrio existem no sistema. Caso $\alpha = 0$ e $\beta > 0$, o sistema possui um comportamento linear, apresentando apenas um ponto de equilíbrio ou monoestável. Quando $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, existe um comportamento monoestável e não linear. Na última situação, se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, existe um sistema com poços potenciais duplos e com aspecto biestável.

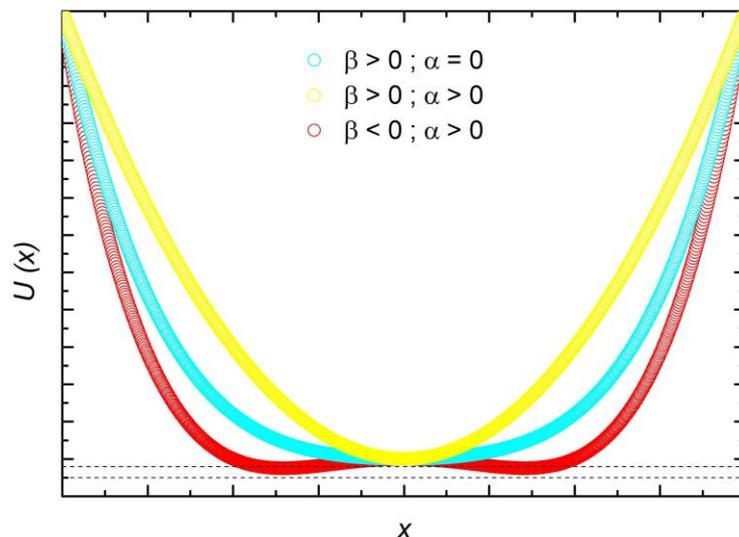


Figura 4 - Energia Potencial $U(x)$ para diferentes valores de α e β

Considerando uma viga engastada é possível obter uma força do tipo Duffing por meio de dois ímãs permanentes com polaridades opostas. Sendo um posicionado na ponta da viga e outro em um suporte externo a ele. Conforme mostrado na figura 5.

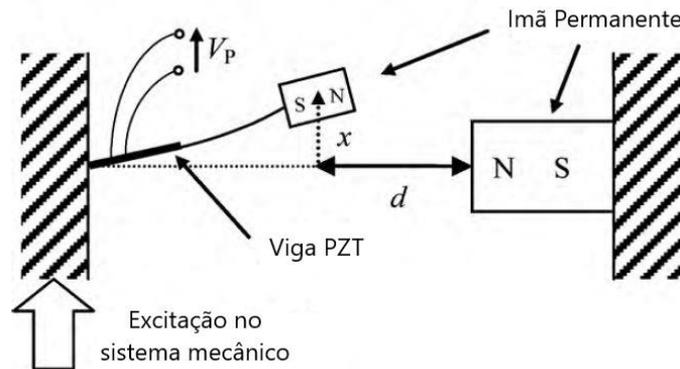


Figura 5 - Sistema de forçamento do tipo Duffing utilizando ímãs permanentes
Fonte: Ferrari et al. (2009)

A análise realizada por Ferrari et al. (2009) é feita simplificando o modelo para a figura 6. O modelo possui apenas um grau de liberdade, a viga tem uma massa m em sua ponta e k representa a rigidez do sistema. Na figura 5 é representado a deflexão do sistema o qual também é representado no modelo simplificado. A uma dada distância (d), quando a massa se move, a força F_r muda de direção em função de um ângulo θ , mas é assumido que esse ângulo se mantém constante pois não há grande variação em sua magnitude.

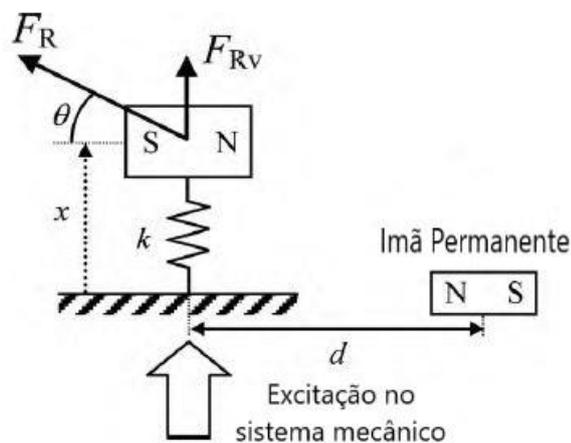


Figura 6 - Geometria do sistema não linear formado por uma viga piezolétrica engastada e dois ímãs permanentes
Fonte: Ferrari et al. (2009)

A componente horizontal da força F_R é balanceada pela rigidez longitudinal da viga engastada. A componente vertical da força de F_R afeta o movimento da viga e é dada por:

$$F_{RV} = F_R \operatorname{sen} \theta \quad (12)$$

O deslocamento vertical x da massa e ângulo θ são relacionados por meio da equação $x = d \operatorname{tg} \theta$. Através das relações trigonométricas, temos que:

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \quad (13)$$

Substituindo a equação (13) em (12):

$$F_{RV} = F_R \operatorname{tg} \theta \sqrt{1 / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} \quad (14)$$

$$\text{Como } x = d \operatorname{tg} \theta \Rightarrow F_{RV} = \frac{F_R x}{d} \sqrt{1 / (1 + (x/d)^2)} \quad (15)$$

F_{RV} pode ser expandida em uma série de Taylor calculada em torno de zero até o terceiro termo. É dessa maneira, é obtida da série a seguinte equação:

$$F_{RV} \cong \frac{F_R}{d} x - \frac{F_R}{2d^3} x^3 \quad (16)$$

Fica claro que de (16) que $\frac{F_R}{d}$ e $-\frac{F_R}{2d^3}$ respectivamente podem ser substituídos coeficientes β e α (coeficientes para uma força do tipo Duffing). Logo, imãs podem representar muito bem uma não linearidade do tipo Duffing.

3 MODELO NUMÉRICO

A análise do sistema de geração de energia foi feita considerando um modelo com um grau de liberdade. Foi utilizada uma viga composta de material piezoelétrico e serão descritas as equações dos sistemas não lineares do tipo Duffing com a presença de um batente mecânico em sua forma adimensional.

3.1 MODELO

O dispositivo de geração de energia consiste em um sistema mecânico ligado a um sistema elétrico por meio de um elemento piezoelétrico (figura 7). O elemento mecânico do sistema consiste em um oscilador conectado a uma massa m , uma mola de rigidez não linear que produz uma força $F(z)$ e ao amortecedor linear com coeficiente c . Além disso, esse sistema mecânico está conectado a um circuito elétrico por meio de um elemento piezoelétrico o qual tem papel de converter energia mecânica em elétrica. O sistema elétrico possui uma resistência R , V representa a tensão elétrica no elemento piezoelétrico, C_p representa a capacitância e θ é o termo de acoplamento eletromecânico. Além disso, a inserção de não linearidades no sistema por meio de impacto é feita com um batente mecânico que possui uma rigidez k_s , um amortecimento linear c_s e um espaçamento (representado por g ou *gap*) entre a massa e o batente mecânico.

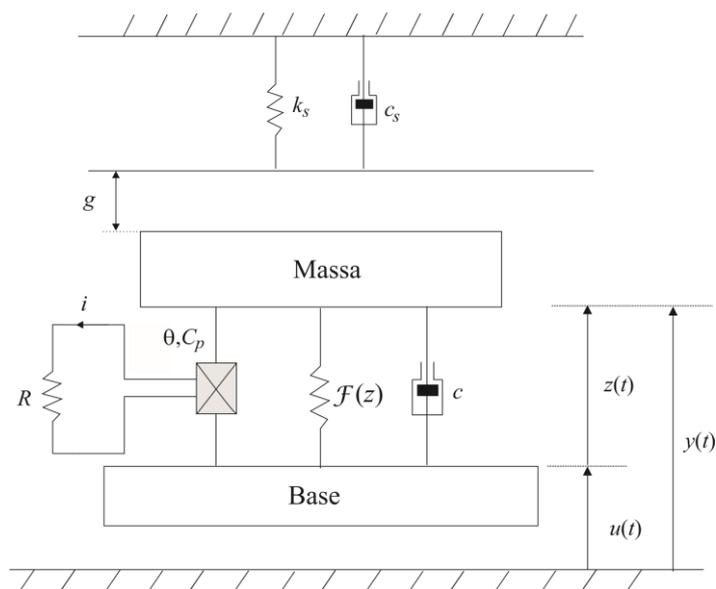


Figura 7 - Modelo arquetípico do sistema de captação de energia baseado em vibrações

As equações que regem o sistema são descritas a seguir:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \hat{\beta}z + \hat{\alpha}z^3 - \theta V = -m\ddot{u} \quad \text{se } z < g \text{ (sem impacto)} \quad (17)$$

$$m\ddot{z} + (c + c_s)\dot{z} + \hat{\beta}z + \hat{\alpha}z^3 + k_s(z - g) - \theta V = -m\ddot{u} \quad \text{se } z \geq g \text{ (com impacto)} \quad (18)$$

$$\theta\dot{z} + C_P\dot{V} + V/R = 0 \quad (19)$$

3.2 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO ADIMENSIONAIS

Uma análise adimensional do sistema será realizada e para isso novas variáveis adimensionais são criadas: $x = z/l$, $U = u/l$, $v = V/\hat{V}$ e $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$. Onde l representa um comprimento de referência, \hat{V} uma tensão elétrica de referência, um *gap* de referência $\bar{g} = g/l$ e o tempo adimensional é $\tau = \omega_0 t$. E por consequência, $d/dt = \omega_0 d/d\tau$ e $d(\blacksquare)/d\tau = (\blacksquare)'$.

$$x'' + \bar{c}x' + \bar{F}(x) - \phi\epsilon v = -U'' \quad \text{se } x < \bar{g} \text{ (sem impacto)} \quad (20)$$

$$x'' + (\bar{c} + \bar{c}_s)x' + \bar{F}(x) + \bar{k}_s(x - \bar{g}) - \phi\epsilon v = -U'' \text{ se } x \geq \bar{g} \text{ (com impacto)} \quad (21)$$

$$\phi x' + v' + v/\rho = 0 \quad (22)$$

Para adimensionalização, novas variáveis foram criadas: $\bar{k} = (k/m\omega_0^2)$, $\bar{c} = (c/m\omega_0)$, $\epsilon = (C_P\hat{V}/ml^2\omega_0^2)$, $\rho = C_P\omega_0 R$ e $\phi = (l/C_P\hat{V})\theta$. Onde, \bar{k} e \bar{c} representam respectivamente a rigidez e o amortecimento mecânico adimensional do piezo, ϵ representa o acomplamento na equação mecânica, ρ é a recíproca da constante de tempo adimensional e ϕ a constante de acomplamento eletromecânico no circuito elétrico. Além disso, sendo x'' , x' e x respectivamente a aceleração, velocidade e deslocamento adimensionais do sistema, v representa a diferença de potencial adimensional, \bar{c}_s amortecimento do suporte, \bar{k}_s a rigidez do suporte e \bar{g} o *gap* definido

entre a massa e o batente mecânico. O forçamento atuante no sistema é descrito pela equação adimensional: $U'' = \gamma \text{sen}(\bar{\omega}\tau)$ sendo γ uma aceleração de forçamento.

A potência dada para o sistema pode ser avaliada por meio da potência instantânea, definida como $P = v^2/\rho$ e a potência média é definida como $P_{Média} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T P(t) d\tau}$, onde $T = 2\pi\omega$. E a razão entre as potências de saída e entrada, $\eta = P_{saída}/P_{entrada}$ descrevem a eficiência de conversão do sistema.

As definições e potência elétrica gerada (saída) e mecânica fornecida ao sistema (entrada) estão conforme a equações (23) e (24):

$$P_{Saída} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (v^2/\rho)^2 d\tau} \quad (23)$$

$$P_{Entrada} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (x'(\gamma \text{sen}(\bar{\omega}\tau)))^2 d\tau} \quad (24)$$

3.3 ESCOLHA DOS PARÂMETROS DE DUFFING

De modo a realizar uma análise comparativa razoável entre os sistemas de colheita de energia, foram utilizados alguns valores de constantes β e α de maneira a manter valores próximos de energia potencial. Sendo que a energia potencial para essa força é dada pela equação abaixo:

$$U(x) = \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{4}\alpha x^4 \quad (25)$$

A figura 8 mostra a energia potencial em função das constantes não lineares β e α . Sendo os casos: $\beta = -1,0$ $\alpha = 0,5$ (biestável); $\beta = 0,6$ $\alpha = 0,3$ (monoestável) e o caso $\beta = 3,0$ $\alpha = 0,0$ (linear). É importante notar que a todos sistemas possuem valores de energia potencial próximos.

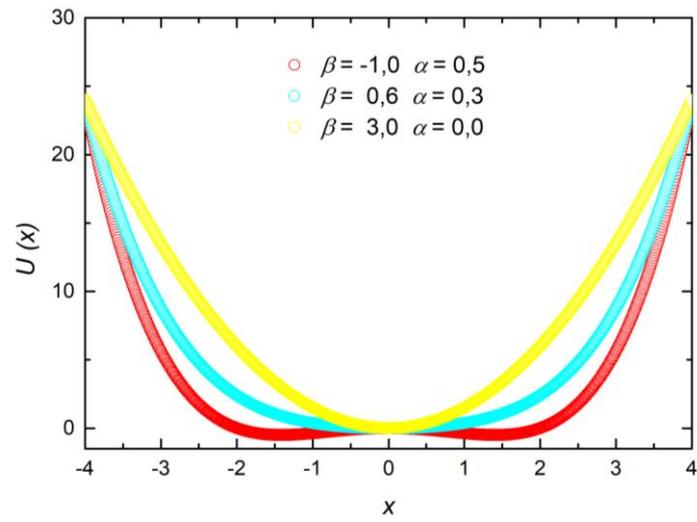


Figura 8 - Força e energia Potencial para diferentes valores de α e β

4 MÉTODO NUMÉRICO E TIPOS DE ANÁLISES

Neste trabalho, foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para solução das equações diferenciais. Após uma análise de convergência, passos de tempo menores que 10^{-3} foram considerados. As respostas das frequências de excitação do sistema são analisadas em função dos termos α , β , \bar{k}_s e o *gap* \bar{g} do modelo.

Para simplificar o modelo, é assumido que o amortecimento do suporte (\bar{c}_s) é igual ao amortecimento do elemento piezoelétrico (\bar{c}). Alguns parâmetros do sistema foram definidos conforme Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do sistema

\bar{c}	ϵ	ϕ	$1/\rho$	γ
0,02	0,1	0,5	0,05	0,1

Fonte: Paula, Inman e Savi (2015)

De maneira a facilitar o entendimento do leitor, as análises realizadas para os sistemas de colheita de energia foram divididas em função do tipo de não linearidade inserida no sistema. Cada variação de sistema é tratada como um caso, esses são dispostos conforme Tabela 2.

Tabela 2 - Não linearidades presentes em cada caso de sistema de colheita de energia

Caso	Duffing	Batente Mecânico	\bar{g}	β	α	μ
1	×	×	3,5	3,0	0	0
2.1	✓	×	3,5	0,6	0,3	0
2.2	✓	×	3,5	-1,0	0,5	0
3	×	✓	1,0:2,0	3,0	0	1:200
4	✓	✓	1,0:2,0	0,6	0,3	1:500

Sendo o **1º caso** um sistema linear, o *gap* é grande o suficiente para não haver impactos.

Os **casos 2.1 e 2.2** introduzem a não linearidade do tipo Duffing. Sendo 2.1, um sistema do tipo monoestável e o caso 2.2 biestável.

No **3º caso** é considerado que o piezoeletrico é linear, está presente no sistema um batente mecânico com \bar{g} variando entre 1,0 até 2,0 com passo de 0,5. A cada *gap*, é variado μ ($\mu = \frac{\bar{k}_s}{\beta}$) com os seguintes valores: 1, 10, 50, 100 e 200.

Para o **4º e último caso**, é considerado que o piezoeletrico possui uma rigidez do tipo Duffing (α e β do caso monoestável), além disso, \bar{g} varia entre 1,0 até 2,0 com passo de 0,5. A cada *gap*, é variado μ ($\mu = \frac{\bar{k}_s}{\beta}$) com os seguintes valores: 1, 10, 50, 100 e 500.

Ao final dos comentários sobre os resultados dos casos, 2.2 (biestável), 3 e 4, foi realizada uma análise comparativa entre os casos quanto a sua potência média de saída ($\bar{P}_{Saída}$) e de eficiência média ($\bar{\eta}$). Estes valores médios são definidos como $\bar{P}_{Saída} = \sum_{i=1}^{N_\omega} P_{Saída} / N_\omega$ e $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^{N_\omega} \eta / N_\omega$, sendo N_ω o número de pontos de frequência angular em um intervalo de varredura na frequência angular analisada. A ordem dessas comparações e quais casos são comparados são mostradas na Tabela 3.

Tabela 3 - Sequência de comparações dos modelos de colheita de energia

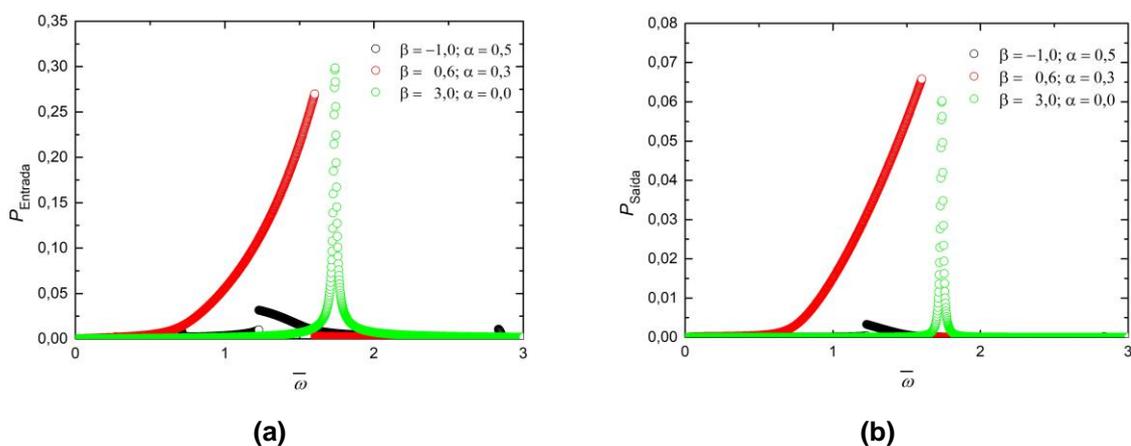
Casos comparados					
Comparação N.º	1	2.1	2.2	3	4
1	✓	✓	✓	✗	✗
2	✓	✓	✗	✓	✗
3	✓	✓	✗	✗	✓

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para mostrar os efeitos das não linearidades na coleta de energia do sistema, foram feitas as curvas de deslocamento máximo, potência média de saída, potência média de entrada e eficiência do sistema em função da frequência de forçamento do sistema. Adotando durante essa análise, diferentes valores para os parâmetros Duffing (α e β), constante de rigidez do batente (\bar{k}_s), onde $\mu = \frac{\bar{k}_s}{\beta}$ e a distância entre a massa e o batente (\bar{g}). Foi variada a frequência de forçamento adimensional ($\bar{\omega}$) no intervalo entre 0 e 3 para obter a resposta do sistema.

Conforme descrito na seção 4, as primeiras análises são feitas para um sistema de geração de energia linear (caso 1), e dois não lineares do tipo Duffing. Sendo um caso monoestável (caso 2.1) e outro biestável (2.2).

Analisando a figura 9, é possível verificar que o sistema linear possui em sua frequência de ressonância um pico de aquisição de energia e eficiência. Em contrapartida, no restante das frequências o sistema não coleta energia de forma significativa. O caso monoestável apresenta uma potência de saída e eficiência mais altas em relação à uma banda maior de aquisição do sistema. E quando comparado o biestável, com o caso monoestável apresenta potência de saída e eficiência superior. Apesar apresentar valores inferiores de energia de saída, são observados dois saltos dinâmicos, o que leva a crer que esses aspectos podem ser explorados por meio de uma mudança no sistema. Outra observação realizada, é de que o modelo linear apresentou uma eficiência e potência quando estava submetido a frequências de excitação maiores em relação ao dispositivo monoestável.



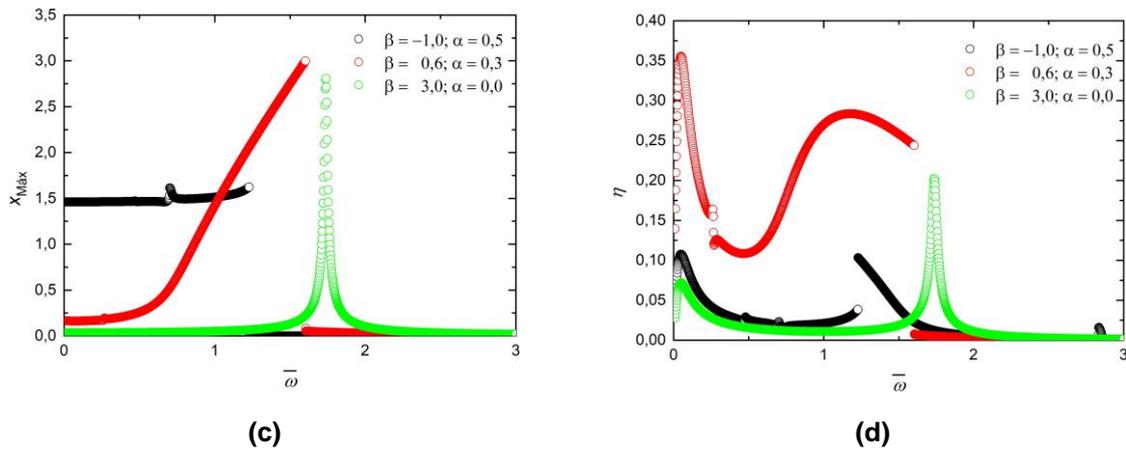


Figura 9 - Comparação entre um sistema de geração linear ($\beta = 3,0 ; \alpha = 0,0$), não linear do tipo Duffing sendo um monoestável ($\beta = 0,6 ; \alpha = 0,3$) e biestável ($\beta = -1,0 ; \alpha = 0,5$) em função da frequência do sistema: (a) Potência de entrada; (b) Potência de saída; (c) Deslocamento máximo; (d) Eficiência do sistema

Após a apresentação dos resultados para os casos linear, monoestável e biestável, foi realizada uma comparação entre os sistemas quando a potência média de saída e sua eficiência média conforme Tabela 4. É possível notar que o sistema linear possui uma potência de saída maior que o biestável (apesar de apresentar mesma eficiência). Além disso, o sistema com não linearidade tipo Duffing monoestável apresenta uma potência média de saída muito superior frente aos outros sistemas. Dessa maneira, as comparações dos próximos sistemas serão feitas utilizando o caso monoestável como referência.

Tabela 4 - 1ª Comparação entre os sistemas de colheita de energia

Caso	$\bar{P}_{Saída}(10^{-3})$	$\bar{\eta}$ (%)
1 (Linear)	0,7	1,9
2.1 (Monoestável)	8,6	11,6
2.2 (Biestável)	0,2	2,4

No segundo tipo de comparações, será avaliado o caso 3 (impacto sem Duffing). Foram feitas análises variando a rigidez do suporte em função da rigidez do piezoelétrico e o gap é de 1,0 até 2,0 com passos de 0,5.

Fica evidente que à medida que o gap é reduzido para ocorrência dos impactos, o sistema deixa de ser linear e é observado um aumento na banda de deslocamento máximo conforme Figura 10 (a). Quando comparado quando $\mu = 10$ e $\mu = 200$, o aumento da rigidez do suporte leva a uma restrição do movimento e bandas maiores são observadas. Em contrapartida, menores amplitudes são alcançadas em função da restrição de movimento. Outra maneira de obter esse efeito, é reduzindo o gap , quando comparado a Figura 10 (b) onde o $\bar{g} = 1,5$ e a Figura 10 (c) com $\bar{g} = 2,0$, a redução do gap permite uma banda mais larga, porém com amplitude menor em relação a um gap maior. É percebido dessa maneira, que a seleção de gap e rigidez de suporte são fatores importantes para design de um sistema de coleta de energia com impactos.

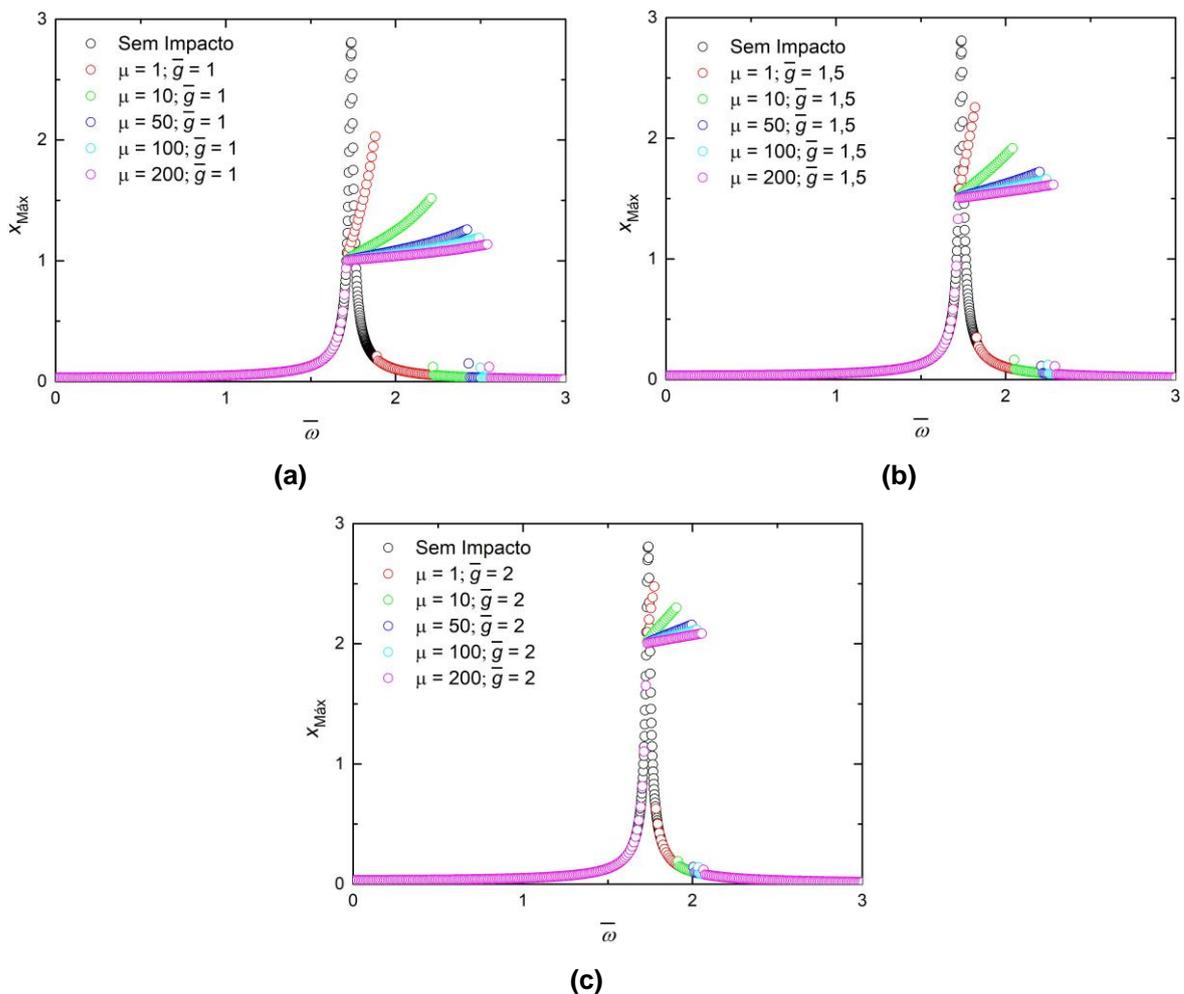


Figura 10 - Deslocamento máximo versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez dos suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$

Em uma perspectiva de energia do sistema, a figura 11 e 12 mostram as potências de entrada no sistema e saída respectivamente. Essas curvas apresentam as mesmas conclusões das curvas de deslocamento máximo. Existe uma redução da potência de entrada e de saída quando são aumentados os *gaps* e quando a rigidez do suporte é reduzida. Em contrapartida, são observadas bandas mais largas em função da frequência para esses parâmetros.

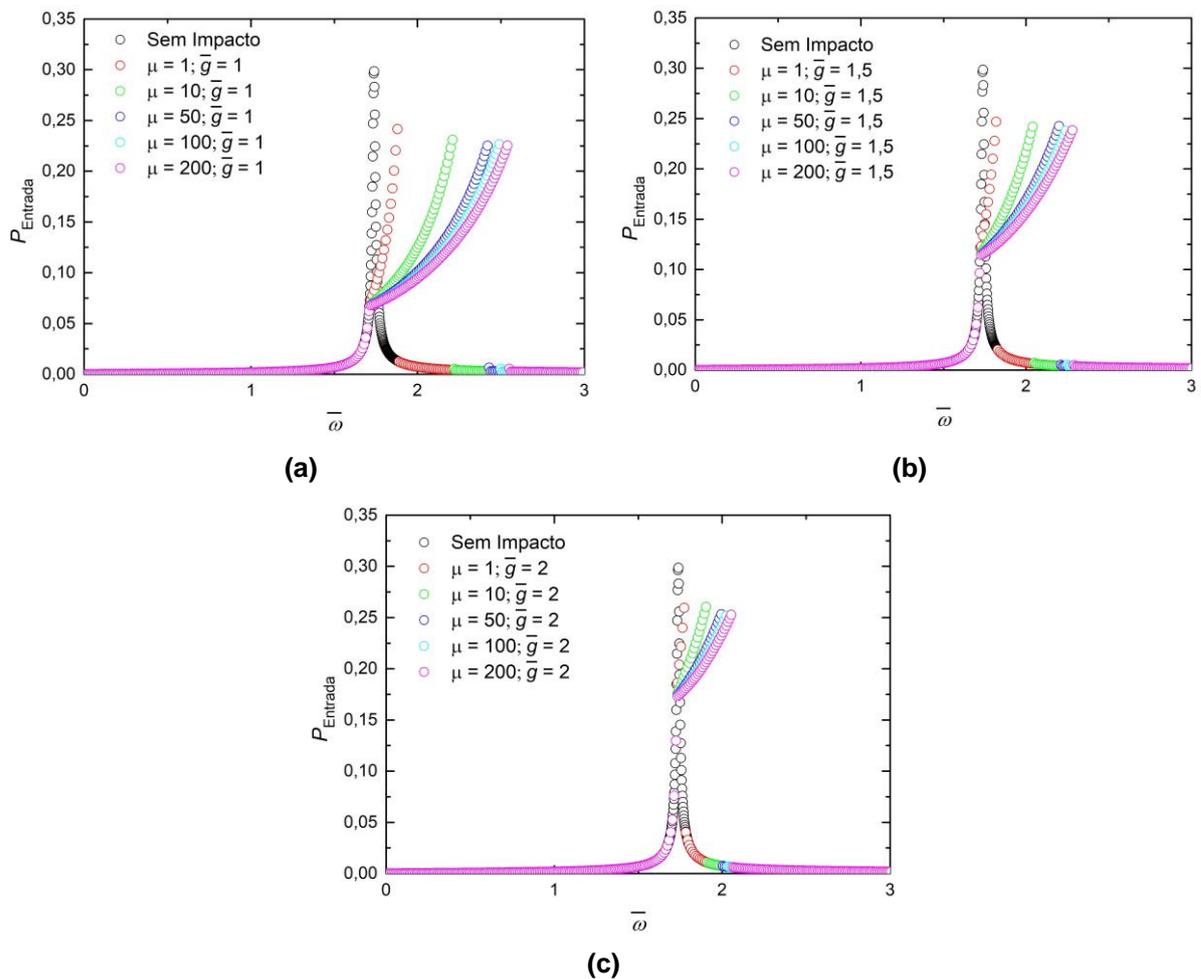


Figura 11 - Potência de entrada versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez do suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$

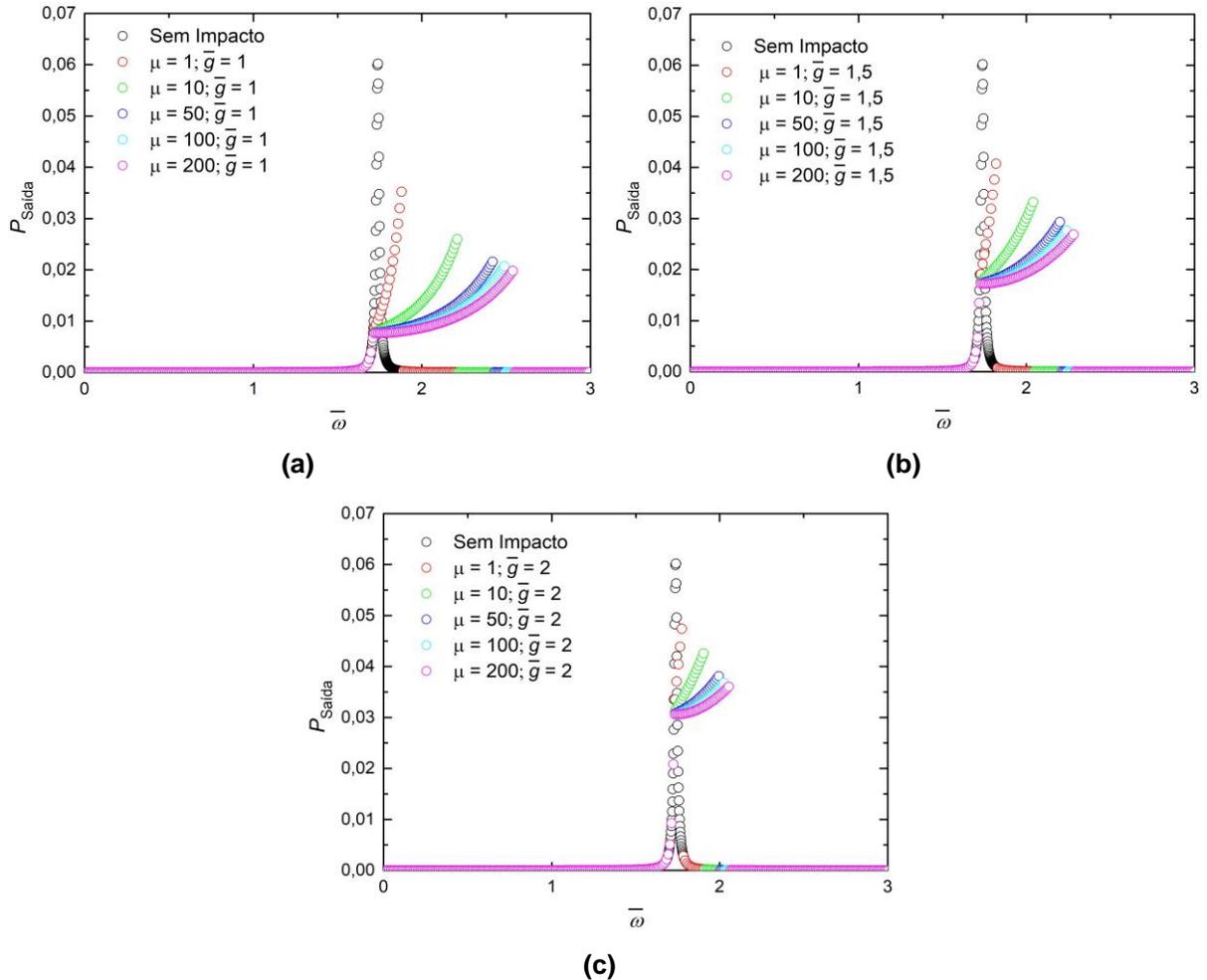


Figura 12 - Potência de saída versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez do suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$

Outra maneira de avaliar a capacidade de um sistema de coleta de energia é em função da sua eficiência de aquisição (η). A figura 13 mostra a eficiência do sistema variando a frequência de forçamento para diferentes valores de rigidez do suporte (μ). É comparado um sistema sem impacto com sistemas que incorporam impactos: $\bar{g} = 2,0$, $\bar{g} = 1,5$ e $\bar{g} = 1,0$. É possível observar que o comportamento é muito semelhante as curvas anteriores, entretanto há uma variação na região do impacto, apresentando uma curva decrescente até o ponto de salto dinâmico, onde a eficiência é próxima de zero.

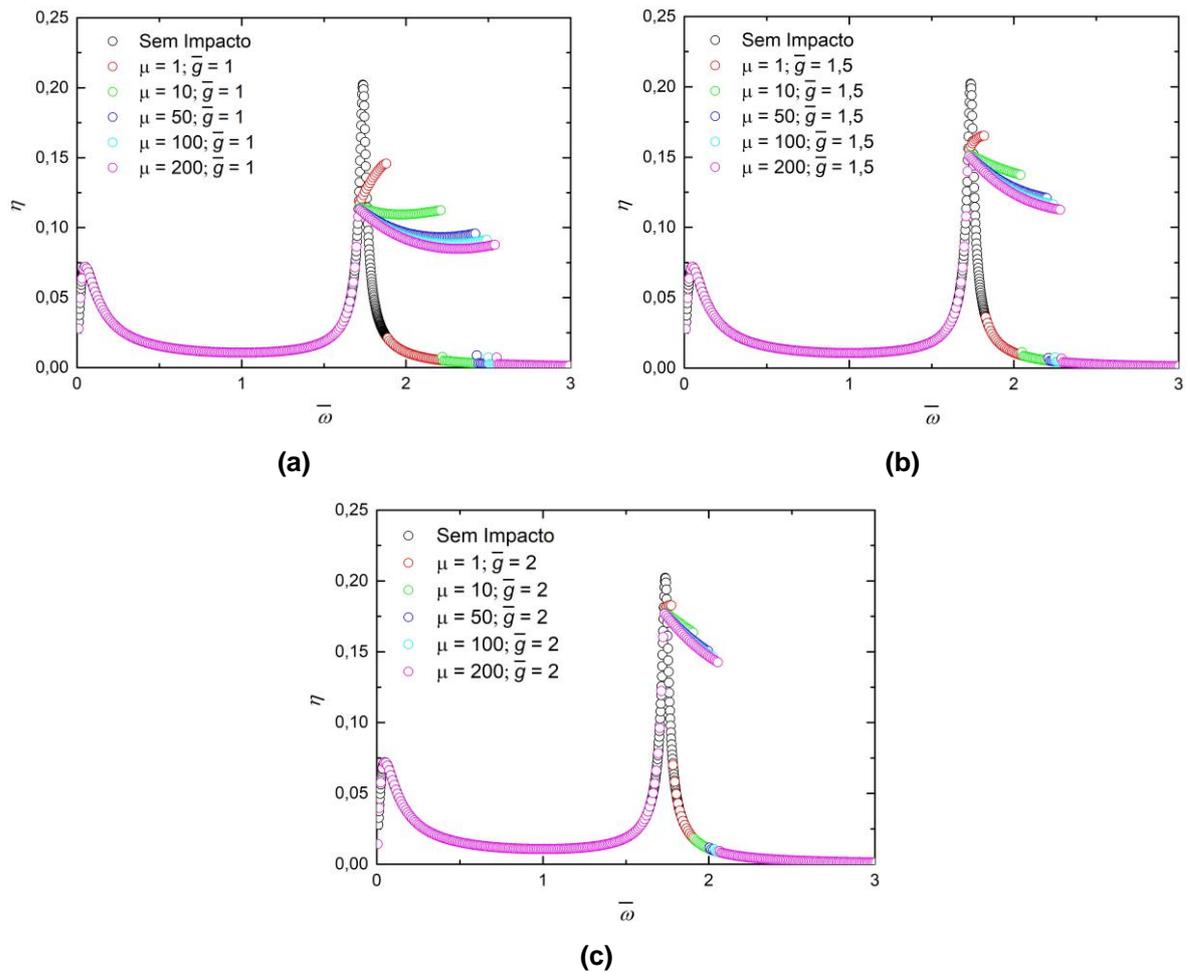


Figura 13 - Eficiência versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 1 (linear) e tipo 3 (com impactos), variando a rigidez do suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$

De forma a evidenciar os efeitos da redução do gap para uma rigidez de suporte constante ($\mu = 50$), a figura 14 mostra que há aumento na banda de aquisição e redução da eficiência do sistema.

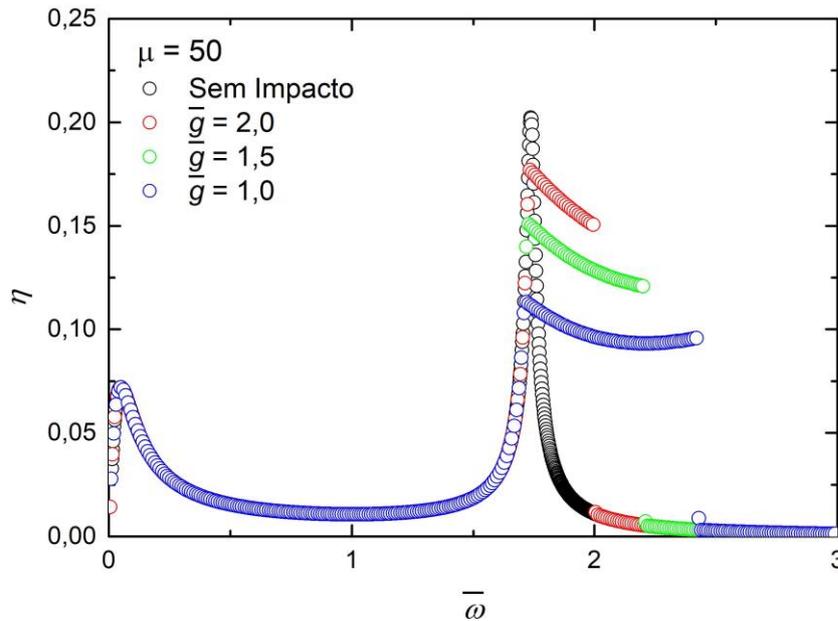


Figura 14 - Eficiência do sistema em função da frequência de forçamento com $\mu = 50$, variando o gap

Com objetivo de avaliar o modelo de coleta de energia com presença de impactos, foi feito um gráfico para potência média de saída e eficiência média (para a faixa de frequência de 0 até 3) em função da rigidez do suporte, para cada gap. A figura 15 mostra a potência média de saída para diferentes valores de razão de rigidez representada por μ . Diferentes gaps são investigados: $\bar{g} = 2,0$, $\bar{g} = 1,5$, $\bar{g} = 1,0$ e para o caso sem impacto. É possível observar que o aumento da rigidez do suporte (μ) tende a maximizar potência de saída ($\bar{P}_{Saída}$). Contudo, aumentos significativos de potência de saída são observados até $\mu = 100$ onde começa ocorrer uma estabilização, mostrando que rigidezes excessivas já não causam mudanças significativas na dinâmica do sistema.

A figura 16 mostra a eficiência média ($\bar{\eta}$) para a mesma situação da figura de potência média, e um comportamento bem similar é observado. Entretanto, agora o modelo que apresenta um comportamento inverso quanto a restrição de movimento e resposta, o ($\bar{g} = 1,0$) exibe resultados médios de eficiência maiores frente aos outros gaps.

Além disso, é observado que todos os gaps (exceto para $\bar{g} = 2,0$ e $\mu = 1$) apresentam eficiência acima do caso linear tanto para potência saída média quanto para eficiência média, mostrando que há ganhos na introdução da não linearidade. Quando comparado o modelo linear com $\bar{g} = 1,5$ e $\mu = 100$, o modelo com impacto apresenta potência média 457% maior e eficiência média 88% maior. Dessa maneira,

fica claro que a introdução dos impactos traz ganhos significativos. É importante destacar que potência saída média e eficiência média de um sistema devem ser avaliadas juntas para definir a capacidade de aquisição de energia para um sistema.

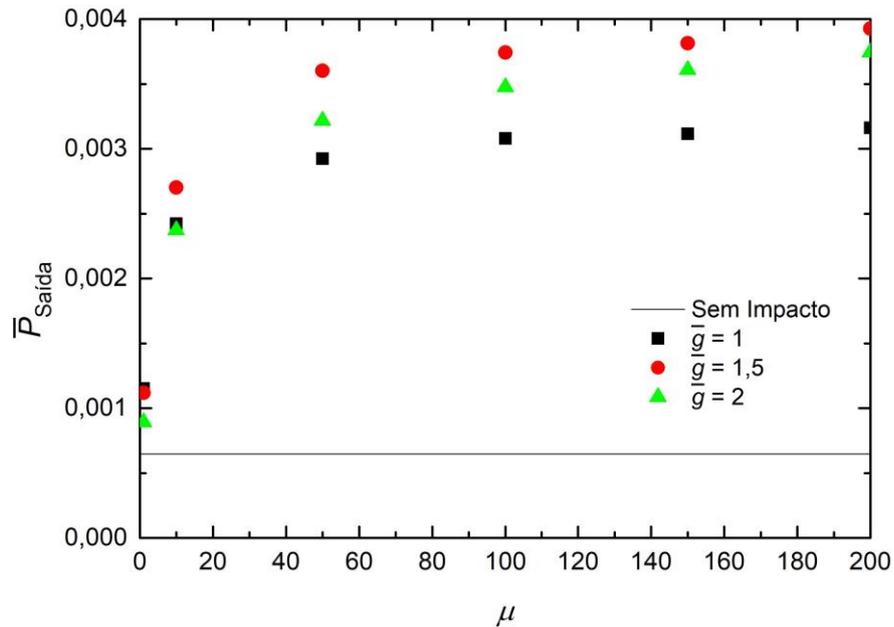


Figura 15 - Média da potência de saída para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de gap, em função da rigidez do batente (μ)

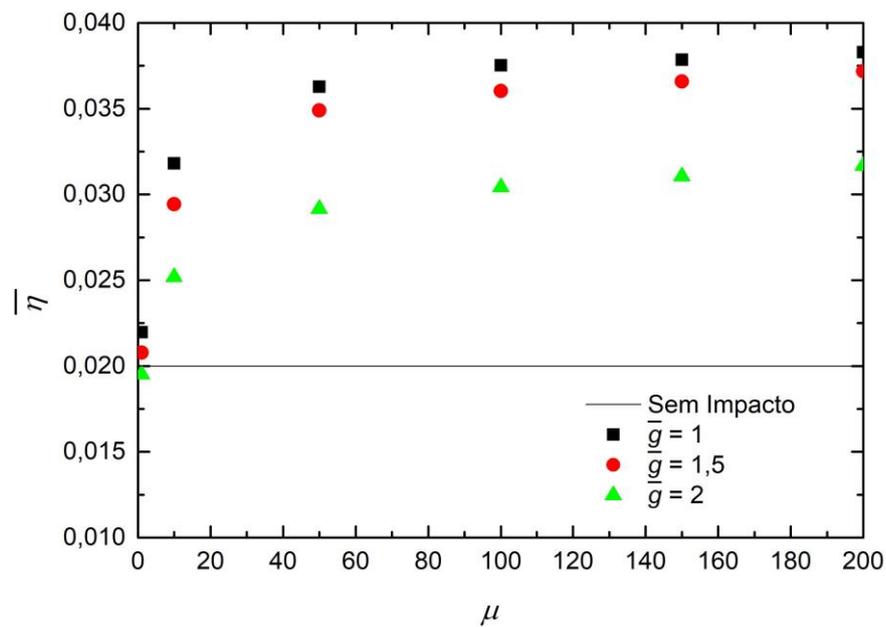


Figura 16 - Eficiência média para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de gap, em função da rigidez do batente (μ)

Após a análise comparativa do modelo de colheita de energia por meio de impactos, foi realizada uma 2ª comparação entre casos possíveis na Tabela 5. Foi escolhido como caso base para o modelo de impacto o modelo que apresenta maior energia observada e possua uma eficiência equiparável quando comparado com outros modelos.

Tabela 5 - 2ª Comparação entre os sistemas de colheita de energia

Caso	$\bar{P}_{Saída}(10^{-3})$	$\bar{\eta}$ (%)
1 (Linear)	0,7	1,9
2.1 (Monoestável)	8,6	11,6
3 (Impacto, $\mu = 200$ e $\bar{g} = 1,5$)	3,9	3,8

Foi avaliado que o sistema com Duffing monoestável é o mais vantajoso dentre os sistemas pois apresenta maior potência e eficiência média de saída ao longo da faixa de frequência de 0 até 3. O segundo modelo mais vantajoso seria o modelo com impactos. Mostrando que há ganhos com a introdução desse tipo de não linearidade.

Com objetivo de realizar a última análise para o caso 4 (Duffing monoestável com impacto). Foram feitas as curvas deslocamento máximo, potência de saída e entrada e eficiência do sistema em função da frequência de excitação do sistema. Para esse modelo de colheita de energia, o piezo possui uma rigidez do tipo Duffing monoestável ($\beta = 0,6$; $\alpha = 0,3$), e um batente que permite os impactos. Ao batente está associado uma razão, $\mu = \frac{\bar{k}_s}{\beta}$, que indica fator da rigidez do suporte. Ao longo das análises, é feita uma variação de μ , e do *gap* com objetivo de explorar os dois tipos de não linearidade (Duffing e impacto) em um mesmo sistema.

A figura 17 apresenta o deslocamento máximo em função da frequência de forçamento ($\bar{\omega}$), são exibidos os três *gaps* utilizados: $\bar{g} = 1,0$; $\bar{g} = 1,5$; e $\bar{g} = 2,0$. E para cada *gap* é variado o μ (razão da rigidez do suporte). Nessa figura, é possível observar que ao ocorrer os impactos, a dinâmica do sistema muda de maneira característica, provocando um rebaixamento da curva. Esse efeito é mais acentuado ao aumentar da rigidez do suporte. A consequência desse comportamento é um aumento na banda

de aquisição com uma redução do deslocamento máximo. Da mesma maneira, é possível notar o mesmo comportamento ao reduzir o *gap* quando comparado a uma mesma rigidez do suporte.

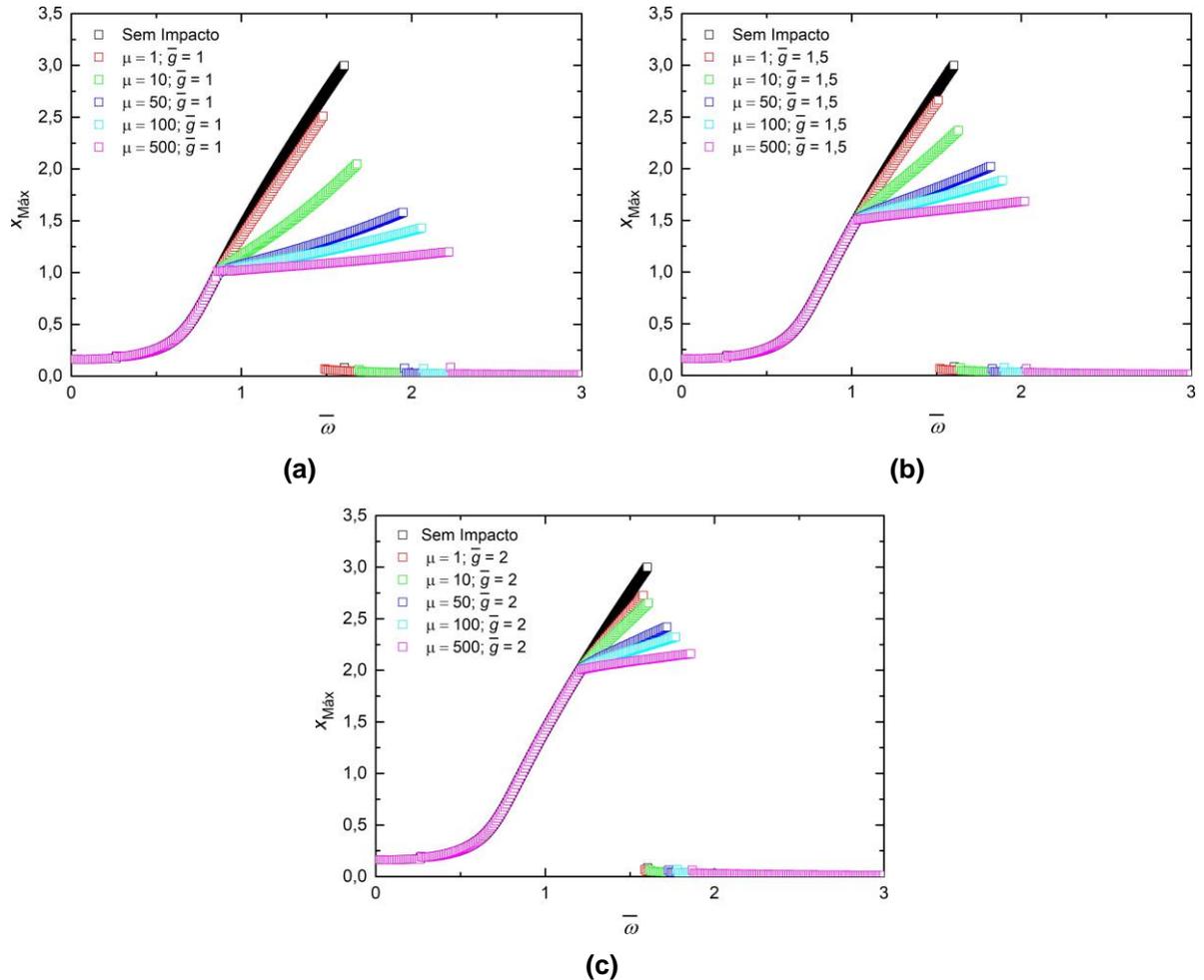


Figura 17 - Deslocamento máximo versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável com impactos), variando a rigidez dos suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$

Observando agora, por uma perspectiva de energia de entrada e saída do sistema de aquisição, as figuras 18 e 19 apresentam respectivamente a potência de entrada e saída para o sistema avaliado. É observado um comportamento muito similar das curvas de deslocamento máximo quanto ao comportamento dinâmico ao variar a rigidez do suporte e o *gap*.

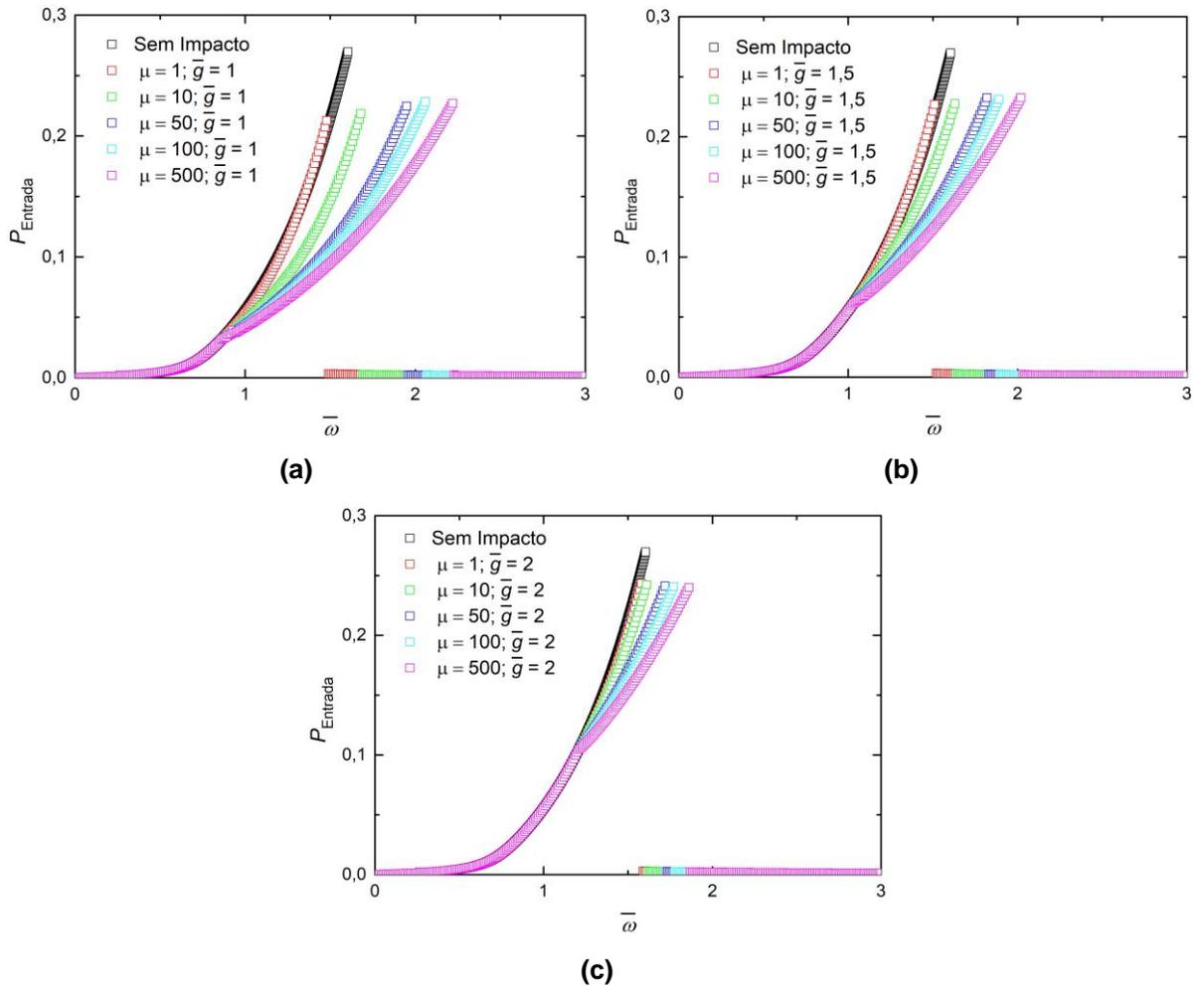
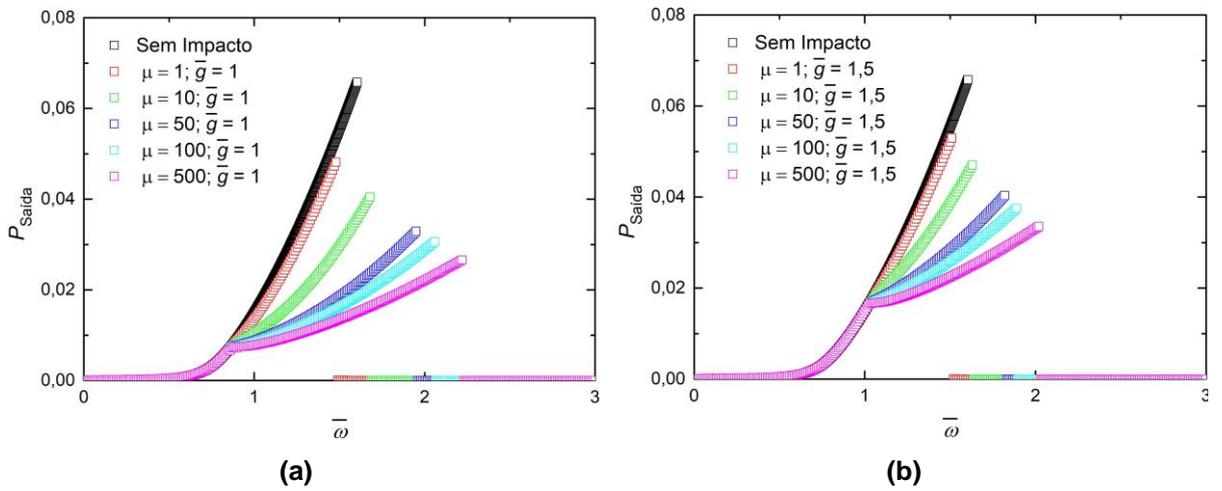


Figura 18 - Potência de entrada versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável com impactos), variando a rigidez dos suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$



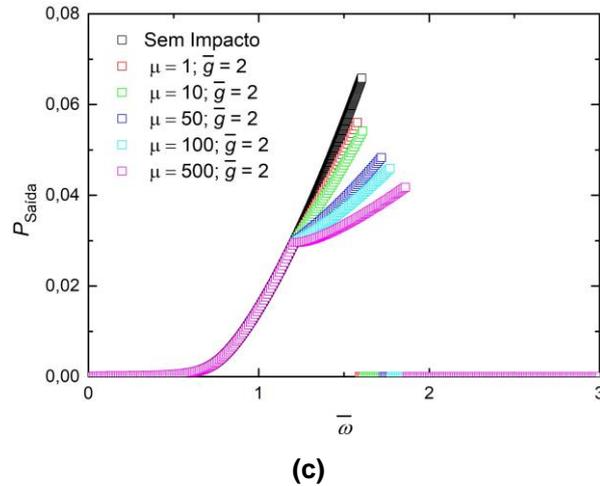
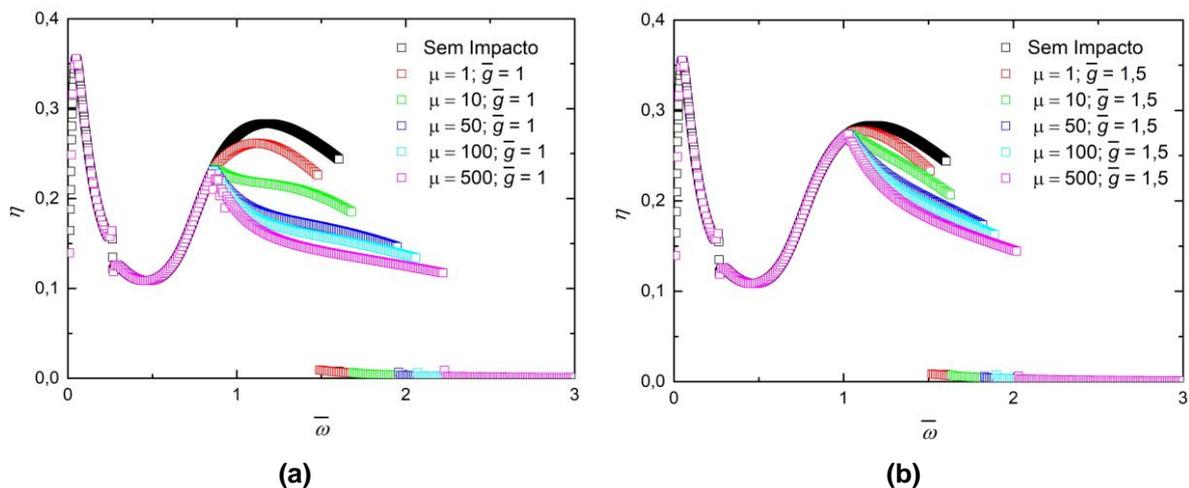


Figura 19 - Potência de Saída versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável com impactos), variando a rigidez do suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$

Outra análise é realizada quanto a capacidade de aquisição de energia do sistema em função da sua eficiência na conversão energética (η). A figura 20 mostra essa eficiência em função da frequência de excitação ($\bar{\omega}$), tal como as curvas de deslocamento máximo e potência. É possível identificar que para um mesmo gap, o aumento da rigidez leva a um rebaixamento em algumas seções da curva de eficiência. Em contrapartida, a banda de eficiência significativa é aumentada (mesmo comportamento observado nas curvas anteriores). Outra comparação pode ser feita entre as curvas com $\bar{g} = 1,0$ e $\bar{g} = 2,0$, quando $\mu = 500$. A redução do gap leva a uma mudança de comportamento dinâmico significativo, e um larga banda relativamente maior é observada para $\bar{g} = 1,0$.



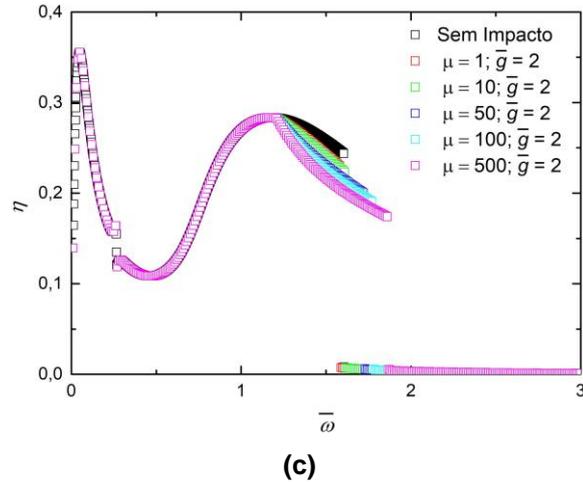


Figura 20 - Eficiência versus frequência de forçamento: Comparação entre sistema de geração de energia do tipo 2.1 (monoestável) e tipo 4 (monoestável com impactos), variando a rigidez dos suportes e o gap (a) $\bar{g} = 1,0$; (b) $\bar{g} = 1,5$; (c) $\bar{g} = 2,0$

De forma a comparar as variações (quanto a *gap* e rigidez do suporte) do modelo de colheita de energia com Duffing e presença de impactos (caso 4), da mesma maneira que foi feito para o modelo com impactos, foi plotado a curva para potência média de saída e eficiência média (para a faixa de frequência de 0 até 3) em função da rigidez do suporte, para cada gap. Na figura 21, é mostrado a potência média de saída. É possível observar que o aumento da rigidez do suporte (μ) leva a um incremento de potência de saída ($\bar{P}_{Saída}$). Entretanto, o efeito do impacto é benéfico ao sistema somente em casos de *gap* $\bar{g} = 1,5$ e $\bar{g} = 2,0$, quando estes são comparados com o modelo de Duffing monoestável.

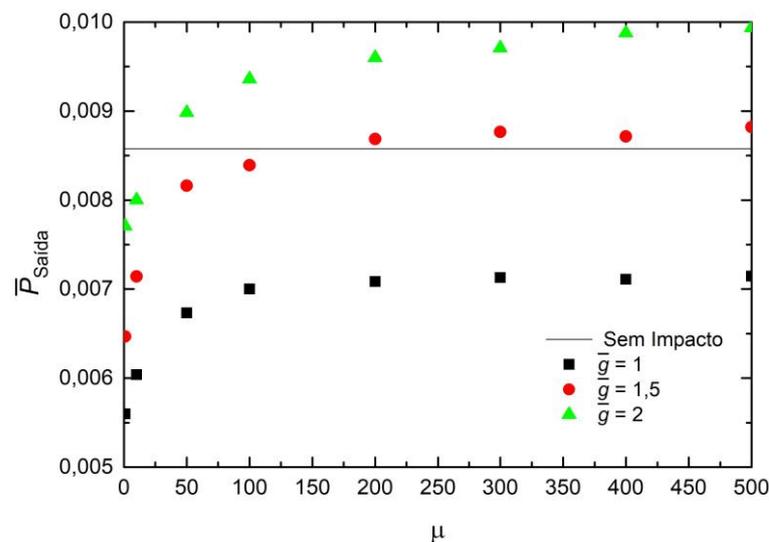


Figura 21 - Média da potência de saída para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de gap, em função da rigidez do batente (μ)

Tratando do segundo indicador do sistema, a eficiência média é mostrada na figura 22, de forma similar ao realizado na potência média de saída. É possível observar, para alguns *gaps* e alguns valores de rigidez do suporte (μ), é mais vantajoso utilizar o sistema somente com o Duffing, sem impactos.

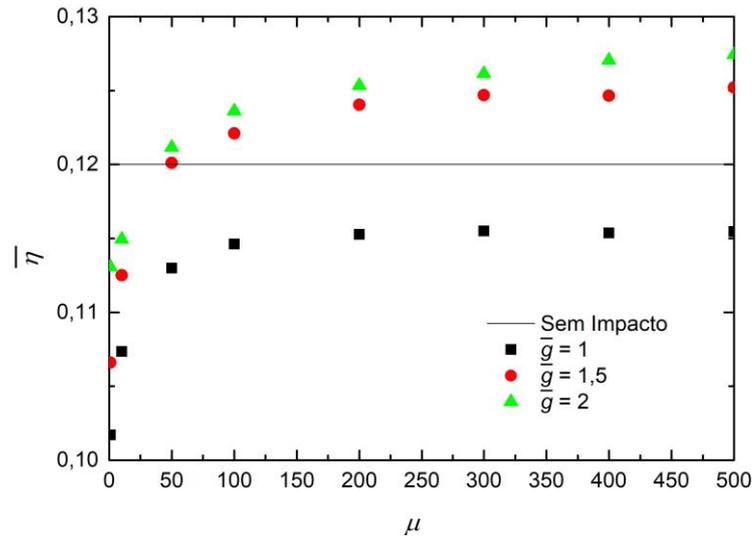


Figura 22 - Eficiência média para diferentes frequências (intervalo de 0 a 3), para diferentes valores de gap, em função da rigidez do batente (μ)

Por meio da análise comparativa para o modelo de Duffing monoestável com impactos, foi possível observar que algumas variações desse sistema são mais eficientes do que apenas o caso de Duffing sem impactos. Quando potência média de saída e eficiência média, foram comparados os modelos na Tabela 6. Fica evidente a maior capacidade de colheita de energia do sistema de Duffing com impactos quando o sistema tem uma rigidez $\mu = 500$ e $\bar{g} = 2,0$ em comparação ao sistema monoestável. Esse sistema obteve quando comparado ao modelo monoestável uma potência média e eficiência maior em respectivamente 11,6% e 9,5%.

Tabela 6 - 3ª Comparação entre os sistemas de colheita de energia

Caso	$\bar{P}_{Saida}(10^{-3})$	$\bar{\eta}$ (%)
1 (Linear)	0,7	1,9
2.1 (Monoestável)	8,6	11,6
4 (Monoestável com impactos, $\mu = 500$ e $\bar{g} = 2,0$)	9,9	12,7

6 CONCLUSÕES

Esse estudo explorou os aspectos de não linearidades do tipo Duffing e introdução de impactos para aplicações de colheita de energia de vibração. Um oscilador com um grau de liberdade foi considerado, conectado a um circuito elétrico contendo material piezoelétrico. Diferentes análises foram realizadas variando tipos de não linearidade no sistema, valores de rigidez do suporte e *gap*. Foram realizadas simulações numéricas para comparar as diferentes não linearidades introduzidas no sistema: linear, Duffing, sendo um caso monoestável e outro biestável, caso com suporte descontínuo e último caso é uma combinação do Duffing monoestável com o suporte descontínuo. Análises de resposta de frequências mostram que ao inserir impactos no sistema, o *gap* e rigidez do suporte modificam o comportamento do sistema, independente se o impacto é inserido no modelo linear ou com Duffing monoestável. Foi constatado que *gaps* grandes reduzem a possibilidade de impactos, e levam a uma redução nas respostas de potência de saída e eficiência, por outro lado a banda de frequência não é tão ampliada quando comparada com *gaps* menores. No caso de utilizar *gaps* pequenos, a amplitude das respostas diminui, mas é aumentada a largura de banda de aquisição significativa. Quanto à rigidez do suporte, de maneira semelhante ao comportamento dos *gaps*, os resultados indicam que o aumento da rigidez de suporte possibilita um aumento na banda de aquisição conjunto com uma redução na resposta da potência de saída e eficiência. A investigação dinâmica sugere que existem valores ótimos de rigidez de suporte para o caso onde há o Duffing presente de forma a aumentar a energia do sistema de colheita de energia. Em conclusão, os resultados indicam que o uso de impactos em conjunto com Duffing é uma opção interessante para melhorar a largura de banda operacional dos sistemas de captação de energia.

Para futuros trabalhos, são sugeridos a inclusão no estudo de sistemas biestáveis combinados a um sistema com impactos, assim como a utilização de ferramentas mais complexas para análise do comportamento dinâmico tais como: diagramas de bifurcação, espaços de fase e seções Poincaré. E de forma a complementar o estudo, realizar ensaios experimentais para avaliar a dinâmica e desempenho dos sistemas propostos.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al, R. et al. **Piezoelectric vibration-based energy harvesting enhancement exploiting nonsmoothness**. *Actuators*, v. 8, n. 25, 2019.

BETTS, D. et al. **Optimal configurations of bistable piezo-composites for energy harvesting**. *Applied Physics Letters*, v. 100, n. 114104, 2012.

BOUHEDMA, S. et al. **Magnetic frequency tuning of a multimodal vibration energy harvester**. *Sensors*, v. 19, n. 1149, 2019.

COSTA, L. G. **Análise paramétrica da dinâmica não-linear de um dispositivo piezoelétrico de colheita de energia**. Exame de Qualificação para Mestrado. CEFET/RJ,2019.

DIVENYI, S.; et al. **Nonlinear dynamics and chaos in systems with discontinuous support**. *Shock Vib.* n. 13, p. 315-326, 2006.

DUTOIT, N. E. **Modeling and design of a mems piezoelectric**. MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, s.n., 2005.

DUTOIT, N. E.; WARDLE, B. L. **Performance of microfabricated piezoelectric vibration energy harvesters**. *Integrated Ferroelectrics*, v. 83, p. 13-32, 2006.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. **An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations**. *Smart Materials and Structures*, v. 18, n. 2, 2009.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. **Piezoelectric energy harvesting**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2011.

FERRARI M, et al. **Improved energy harvesting from wideband vibrations by nonlinear piezoelectric converters**. *Procedia Chemistry*, v. 1, p. 1203-1206, 2009.

FRISWELL, M. et al. **Nonlinear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass.** Journal of Intelligent Material Systems and Structures, v. 23, p. 1505-1521, 2012.

JACQUELIN, E.; ADHIKARI, S.; FRISWELL, M.I. **A piezoelectric device for impact energy harvesting.** Smart Mater. Struct., v. 20, 105008–105020, 2011.

JIA, Y.; SESHIA, A. A. **Power optimization by mass tuning for mems piezoelectric cantilever vibration energy harvesting.** Journal of Microelectromechanical Systems, v. 25, n. 1, p. 108-117, 2016.

KIM, M. et al. **Modeling and experimental verification of proof mass effects on vibration energy harvester performance.** Smart Materials and Structures, v. 19, n. 6, 2010.

KOVACIC, I.; BRENNAN, M. **The duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour.** 1.ed. United Kingdom: John Wiley & Sons, Ltd., 2011. cap.2, p. 25-34.

MANN, B. P.; SIMS, N. D. **Energy harvesting from the nonlinear oscillations of magnetic levitation.** Journal of Sound and Vibration, v. 319, p. 515-530, 2009.

MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric transducers for vibration control and damping.** London: Springer, 2006.

MONROE, N. M.; LANG, J. H. **Broadband, large scale acoustic energy harvesting via synthesized electrical load:** ii. Electrical load. Smart Materials and Structures, v. 28, n. 5, 2019.

PAULA, A. S. D.; INMAN, D. J.; SAVI, M. A. **Energy harvesting in a nonlinear piezomagnetoelastic beam subjected to random excitation.** Mechanical Systems and Signal Processing, v. 54-55, p. 405-416, 2015.

PEREIRA, T. L. et al. **Random effects in a nonlinear vibration-based piezoelectric energy harvesting system**. International Journal of Bifurcation and Chaos. v. 29, n. 04, 2019.

RAMLAN, R. et al. **Potential benefits of a non-linear stiffness in an energy harvesting device**. Nonlinear Dynamics, v. 59, p. 59-545, 2010.

RYSAK, A. et al. **Broadband concept of energy harvesting in beam vibrating systems for powering sensors**. Adv. Sci. Technol. Res. J., n. 8, p. 62-67, 2014.

SAVI, M.A et al. **Numerical and experimental investigations of the on linear dynamics and chaos in non-smooth systems**, J. Sound Vib., n. 30, p. 59-73, 2007.

SEBALD, G. et al. **Experimental duffing oscillator for broadband piezoelectric energy harvesting**. Smart Materials and Structures, v. 20, n. 102001, 2011.